P-Absolutely Summing Operatorの補間法による一般化 (補間空間の理論およびその応用)

宮崎, 虔一

数理解析研究所講究録
136巻 1972年 91-110

p-absolutely summing operator の補間法による一般化

九州工大　宮崎慶一

§1. 序

近年、東欧を中心とした多くの人々によって Hilbert-Schmidt 作用素を一般化した Banach 空間の間の作用素の議論がなされている（[2], [6], [8], [13], [14], [15], [16], [18], [19], [21], [22]）。

就中，Mitjagin と Pełczyński [9] により定義された (p, q)-absolutely summing operator の議論は、

Grothendieck の left semi-integral operator [3] は，(1, 1)-absolutely summing operator であり、

Saphar の left Hilbert-Schmidt operator [22] は，(2, 2)-absolutely summing operator であり、

Pietsch の p-absolutely summing operator [18] は，(p, p)-absolutely summing operator である、

という意味で興味深い。

我々は、この作用素を一般化した $(p, q; r)$-absolutely summing operator を定義し，その個々の作用素の性質、その作用素全体の作る normed ideal の性質，更にはそれら normed ideals の補間等について論ずる。

§2. $(p, q; r)$-absolutely summing operator

X，Y を Banach 空間とし，$B(X, Y)$ を X から Y への有界線形作用素の全体とする。

<u>定義 1.</u> $1 \leqq p, q, r \leqq \infty$ とする。$T \in B(X, Y)$ が，X の任意の有限点列 $\{x_i\}$ に対し数列 $\{\|Tx_i\|\}$ の非減少列への並べ替えを $\{\|Tx_i\|_*\}$ と表わすとき

$$(1)\quad \left\{\sum_i \left(i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|Tx_i\|_*\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leqq \rho \sup_{\|a\|\leqq 1} \left(\sum_i |\langle x_i, a\rangle|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

をみたすなら，$(p, q; r)$-absolutely summing operator であるという。ここで a は X の dual space X^* の弱 compact 単位球の要素，ρ は定数。また (1) の左，右辺でそれぞれ $q = \infty$，$r = \infty$ のときは，普通のように $\sup_i$ を表わすものとする。

(1) をみたす定数 ρ の下限を $\pi_{p,q;r}(T)$ で表わし，これをノルムとする $(p,q;r)$-absolutely summing operators 全体を $\Pi_{p,q;r}(X,Y)$ と表わす。

注意、上の定義で，特に $p=q$ のときは，Mitjagin and Pełczyński [9], [6] の (p,r)-absolutely summing operator（以後，このとき (p,r) の代りに $(p;r)$ とかく）。$\Pi_{p,p;r}(X,Y)$ を $\Pi_{p;r}(X,Y)$，$\pi_{p,p;r}(T)$ を $\pi_{p;r}(T)$ とかく。また，$p=q=r$ のときは，Pietsch の p-absolutely summing operator [18] で，$\Pi_{p,p;p}(X,Y)$ を $\Pi_p(X,Y)$，$\pi_{p,p;p}(T)$ を $\pi_p(T)$ とかく。

定義からただちに次のことが成立する。

命題 1. $B(X,Y)$ の要素 T の作用素ノルムを $\|T\|$ とかくとき，任意の $T\in\Pi_{p,q;r}(X,Y)$ に対して

$$\|T\| \leqq \pi_{p,q;r}(T)$$

が成立する。

これを用いて

命題 2. $\Pi_{p,q;r}(X,Y)$ はノルム $\pi_{p,q;r}(T)$ に関して Banach 空間になる。

また，定義から次のことも容易に云える。

命題 3. 1) $1\leqq r\leqq\infty$ のとき

$$\Pi_{\infty,\infty;r}(X,Y) = B(X,Y)$$ となり、

各 $T \in \Pi_{\infty,\infty;r}(X,Y)$ に対して

$$\pi_{\infty;r}(T) = \|T\|$$ が成立する。

2) $1 \leqq p \leqq q < r \leqq \infty$ のとき、

$$\Pi_{p,q;r}(X,Y) = \{0\}$$ となる。

各 Banach 空間の組 X, Y に対して $\Pi_{p,q;r}(X,Y)$ に属する作用素の全体を $\Pi_{p,q;r}$ と表わすと、これは次の意味で B の両側イデヤルになる。

<u>命題 4</u>. X, Y, Z を Banach 空間とする。

1) $S \in B(X,Y)$, $T \in \Pi_{p,q;r}(Y,Z)$ なるとき、

$$T \circ S \in \Pi_{p,q;r}(X,Z)$$ となり、

$$\pi_{p,q;r}(T \circ S) \leqq \pi_{p,q;r}(T)\|S\|$$

が成立する。

2) $S \in \Pi_{p,q;r}(X,Y)$, $T \in B(Y,Z)$ なるとき

$$T \circ S \in \Pi_{p,q;r}(X,Z)$$ となり、

$$\pi_{p,q;r}(T \circ S) \leqq \|T\| \cdot \pi_{p,q;r}(S)$$

が成立する。

normed ideal $\Pi_{p,q;r}$ の parameter p, q, r に関する包含関係については、定義と、数列-Lorentz 空間 $l_{p,q}$ のノルムの関係から、次のことが得られる。

<u>命題 5</u>.　1)　$1 \leqq p_1 < p_2 \leqq \infty$，$1 \leqq q_1, q_2, r \leqq \infty$ なるとき，$\Pi_{p_1, q_1; r}(X, Y) \subset \Pi_{p_2, q_2; r}(X, Y)$ となり，各 $T \in \Pi_{p_1, q_1; r}(X, Y)$ に対して

$$\pi_{p_2, q_2; r}(T) \leqq c\, \pi_{p_1, q_1; r}(T)$$

が成り立つ。

2)　$1 \leqq q_1 \leqq q_2 \leqq \infty$，$1 \leqq p, r \leqq \infty$ なるとき，$\Pi_{p, q_1; r}(X, Y) \subset \Pi_{p, q_2; r}(X, Y)$ となり，各 $T \in \Pi_{p, q_1; r}(X, Y)$ に対して

$$\pi_{p, q_2; r}(T) \leqq c\, \pi_{p, q_1; r}(T)$$

が成り立つ。

3)　$1 \leqq r_1 \leqq r_2 \leqq \infty$，$1 \leqq p, q \leqq \infty$ なるとき $\Pi_{p, q; r_2}(X, Y) \subset \Pi_{p, q; r_1}(X, Y)$ となり，各 $T \in \Pi_{p, q; r_2}(X, Y)$ に対して

$$\pi_{p, q; r_1}(T) \leqq c\, \pi_{p, q; r_2}(T)$$

が成り立つ。ここで，c は全部ある定数を表わす。

更に，Kwapień の結果 [5] を $\Pi_{p, q; r}$ の場合に一般化して，次の命題が成立する。

<u>命題 6</u>.　$p_1 \geqq q_1$ または $p_1 < q_1 < r_1$ をみたす実数 p_i, q_i, r_i，$i = 1, 2$，$1 \leqq p_i, q_i, r_i \leqq \infty$，が $1/p_1 - 1/p_2 = 1/q_1 - 1/q_2 = 1/r_1 - 1/r_2 \geqq 0$ なるとき $\Pi_{p_1, q_1; r_1}(X, Y) \subset \Pi_{p_2, q_2; r_2}(X, Y)$。

また，各 $T \in \Pi_{p_1, q_1; r_1}(X, Y)$ に対して

$$\pi_{p_2, q_2; r_2}(T) \leqq \pi_{p_1, q_1; r_1}(T)$$

が成立する。

この命題5，6を用いて

系 $p_2 \geqq q_2$ または $p_2 < q_2 < r_2$ をみたす実数 $1 \leqq p_i, q_i, r_i \leqq \infty$，$i = 1, 2$，に対して，$1/p_1 - 1/p_2 \geqq 1/r_1 - 1/r_2 \geqq 0$，$1/q_1 - 1/q_2 \geqq 1/r_1 - 1/r_2$ が成り立つとき，$\Pi_{p_1, q_1; r_1}(X, Y) \subset \Pi_{p_2, q_2; r_2}(X, Y)$ が成立し，各 $T \in \Pi_{p_1, q_1; r_1}(X, Y)$ は

$$\pi_{p_2, q_2; r_2}(T) \leqq \pi_{p_1, q_1; r_1}(T)$$

を満足する。

§3. $(p, q; r)$-absolutely summing operators の積

Hilbert 空間の上の Hilbert-Schmidt 作用素 S，T の積 $T \circ S$ は nuclear 作用素になる，という古典的定理は，Pietsch [18] により，次のように拡張された：

X，Y，Z を Banach 空間とするとき，

1) $1 \leqq p, q, r \leqq \infty$ が $1/r = 1/p + 1/q \leqq 1$ をみたすなら，任意の $S \in \Pi_p(X, Y)$，$T \in \Pi_q(Y, Z)$ に対して $T \circ S \in \Pi_r(X, Z)$ となり，

$$\pi_r(T\circ S) \leqq \pi_q(T)\cdot\pi_p(S)$$

が成り立つ。

2) $1/p + 1/q \geqq 1$ のときは、任意の $S\in\Pi_p(X,Y)$ $T\in\Pi_q(Y,Z)$ に対して，$T\circ S\in\Pi_1(X,Z)$ となり

$$\pi_1(T\circ S) \leqq \pi_q(T)\cdot\pi_p(S)$$

が成立する。

この結果と，数們の Tomczak の結果 [26] を $\Pi_{p,q;r}$ に拡張して，次の定理 1，2 を得る。

<u>定理 1.</u> X, Y, Z を Banach 空間とする。

$1\leqq p,\ p_i,\ q_i,\ r_i \leqq\infty$, $i=1,2$, が

$1/p_2 \leqq 1/p + 1/p_1 \leqq 1$, $1/q_2 \leqq 1/p + 1/q_1 \leqq 1$,

$1/p + 1/r_1 \leqq 1/r_2$ をみたすとき，任意の $T\in\Pi_p(X,Y)$, $S\in\Pi_{p_1,q_1;r_1}(Y,Z)$ に対して，$S\circ T\in\Pi_{p_2,q_2;r_2}(X,Z)$ となり

$$\pi_{p_2,q_2;r_2}(S\circ T) \leqq \pi_{p_1,q_1;r_1}(S)\,\pi_p(T)$$

が成立する。

<u>証明.</u> 命題 5 から，$1/p_2 = 1/p + 1/p_1 \leqq 1$, $1/q_2 = 1/p + 1/q_1 \leqq 1$, $1/r_2 = 1/p + 1/r_1$ のときを云えば十分。

先ず，Pietsch [18] による p-absolutely summing operator の特徴付け：

$T \in B(X, Y)$ が p-absolutely summing なるための必要十分条件は，X の dual space X^* の弱単位球 K^* 上の regular positive Radon measure μ が存在して，各 $x \in X$ に対して

$$\| Tx \| \leqq \pi_p(T) \{ \int_{K^*} |\langle x, a \rangle|^p \, d\mu(a) \}^{1/p}$$

が成立することである。

が仮定の T に対して成立していることに注意する。

今，X の任意の有限点列 $\{x_i\}$ に対し，

$$x_i = x_i^0 \xi_i, \quad \xi_i = \left(\int_{K^*} |\langle x_i, a \rangle|^{r_2} \, d\mu(a) \right)^{1/p}$$

とおく。このとき，Hölder の不等式と定義とから

$$\left(\sum_i i^{\frac{q_2}{p_2}-1} \| STx_i \|_*^{q_2} \right)^{1/q_2}$$

(2) $$\leqq \left(\sum_i i^{\frac{q_1}{p_1}-1} \| STx_i^0 \|_*^{q_1} \right)^{1/q_1} \left(\sum_i |\xi_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\leqq \pi_{p_1, q_1; r_1}(S) \sup_{\|b\| \leqq 1} \left(\sum_i |\langle Tx_i^0, b \rangle|^{r_1} \right)^{1/r_1} \left(\sum_i \int_{K^*} |\langle x_i, a \rangle|^{r_2} d\mu \right)^{1/p},$$

ここで，p-absolutely summing operator T の factorization theorem [18] を用い，更に Hahn-Banach の定理を用いて，次のことが云える：

(2) の $\langle Tx_i^0, b \rangle$ に対して，$f(a) \in L_{p'}(K^*, \mu)$ が存在して（$1/p + 1/p' = 1$），

$$\langle Tx_i^0, b \rangle = \int_{K^*} \langle x_i^0, a \rangle f(a) \, d\mu(a), \quad x_i^0 \in X$$

と，

(3) $\left(\int_{K^*} |f(a)|^{p'} d\mu(a)\right)^{1/p'} \leqq \pi_p(T)\|b\|$

が成立する。

これを，(2) の右辺の $\left(\sum |\langle Tx_i, b\rangle|^{r_1}\right)^{1/r_1}$ に適用すると

(4) $\left(\sum |\langle Tx_i, b\rangle|^{r_1}\right)^{1/r_1} \leqq \sup\limits_{\|a\|\leqq 1}\left(\sum |\langle x_i, a\rangle|^{r_2}\right)^{1/r_1}\left(\int_{K^*} |f(a)|^{p'} d\mu\right)^{1/p'}$

となり，(2)，(3)，(4) から

$$\left(\sum i^{\frac{q_2}{p_2}-1} \|STx_i\|_*^{q_2}\right)^{1/q_2}$$

$$\leqq \pi_{p_1,q_1;r_1}(S)\cdot\pi_p(T)\sup_{\|a\|\leqq 1}\left(\sum |\langle x_i, a\rangle|^{r_2}\right)^{1/r_2}$$

となる。証明終。

<u>定理2</u>. $1 \leqq p,\ p_1,\ q_1,\ r_1 \leqq \infty$ が $1/p + 1/p_1 \geqq 1$，$1/p + 1/q_1 \geqq 1$，$1/p + 1/r_1 \leqq 1$ をみたすとき，任意の $T \in \Pi_p(X, Y)$，$S \in \Pi_{p_1,q_1;r_1}(Y, Z)$ に対して $S\circ T \in \Pi_1(X, Z)$ となり，

$$\pi_1(S\circ T) \leqq \pi_{p_1,q_1;r_1}(S)\cdot\pi_p(T)$$

が成立する。

この定理は $p = 1$ のときは，命題4から明らかだし、$p > 1$ のときは，命題5と定理1を用いて証明される。

§4. $\mathcal{L}_p$-空間の上の $(p, q; r)$-absolutely summing operators.

空間 X が $\mathcal{L}_p$-空間 [6] の特別な場合なるときには、Tomczak [26], Kwapień [5] と同様な結果が, $(p, q; r)$-absolutely summing operator に対しても得られる。

それをみるために、次のことに注意する:

補題 1. X が, ある measure space (K, Σ, μ) に対する空間 $L_1(\mu)$ のある部分空間と isomorphic な空間、Y は任意の Banach 空間とする。このとき, $T \in B(X, Y)$ が $(p, q; 1)$-absolutely summing であるための必要十分条件は, 任意の $S \in B(\ell_\infty, X)$ に対して, $T \circ S \in \Pi_{p,q;1}(\ell_\infty, Y)$ となることである。

一方, Lindenstrauss and Pełczyński [6] の結果によれば, 補題中の S は 2-absolutely summing である、ということが知られている。

このことと、定理 1 を利用すれば, 任意の $T \in \Pi_{p_2,q_2;2}(X, Y)$ に対して, つねに $T \circ S \in \Pi_{p_1,q_1;1}(\ell_\infty, Y)$ となり, 従って補題 1 から $T \in \Pi_{p_1,q_1;1}(X, Y)$ となる。

以上から

定理 3. X, Y は補題 1 におけると同じ空間とする。$1 \leqq p_i, q_i \leqq \infty$, $i = 1, 2$, が $1 \leqq p_1 \leqq 2$, $1 \leqq q_1 \leqq 2$, $p_1 \geqq q_1$, $1/p_2 = 1/p_1 - 1/2$, $1/q_2 = 1/q_1 - 1/2$ をみたすなら,

$$\Pi_{p_1, q_1; 1}(X, Y) = \Pi_{p_2, q_2; 2}(X, Y)$$

が成立する。

この例として,

系、 p_i, q_i, $i = 1, 2$, は定理 3 と同じ条件をみたすものとする。$1 \leqq r \leqq 2$ とし, Y を任意の Banach 空間とすると

$$\Pi_{p_1, q_1; 1}(l_r, Y) = \Pi_{p_2, q_2; 2}(l_r, Y),$$

$$\Pi_{p_1, q_1; 1}(L_r(0, 1), Y) = \Pi_{p_2, q_2; 2}(L_r(0, 1), Y)$$

が成立する。

これは, [6] の結果:

$1 \leqq r \leqq 2$ のときは、l_r, $L_r(0, 1)$ は $L_1(\mu)$ の部分空間と isomorphic になる。

に基づく。

§ 5. Hilbert 空間上の $(p, q; r)$-absolutely summing operator.

この§では，H を separable Hilbert space とする。

$\Pi_{2,1}(H, H) = B(H, H)$ なることと，命題6の系を用いれば次の定理が成立する。

定理4. $1 \leqq p, q, r < \infty$ が $p \geqq q$ なるとき，更に $1/2 + 1/p \leqq 1/r$, $1/2 + 1/q \leqq 1/r$ をみたしているなら

$$\Pi_{p,q;r}(H, H) = B(H, H)$$

が成り立つ。

次に，Hilbert-Schmidt 作用素の一般化でもあり，nuclear 作用素の一般化でもある Pietsch [16] の type l_p の作用素を一般化する。

Banach 空間 X, Y に対して，$\mathcal{A}_i(X, Y)$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, をその値域が高々 i 次元である作用素の全体とするとき，$T \in B(X, Y)$ に対して

$$\alpha_i(T) = \inf\{\|T - A\| : A \in \mathcal{A}_i(X, Y)\}$$

は T の i 次の近似度 (approximation number) と云われる [2], [23]。

定義2. $\{T \in B(X, Y) : \{\alpha_i(T)\} \in l_{p,q}\}$ を $l_{p,q}(X, Y)$ ($p = q$ のとき $l_p(X, Y)$) とかき，その要素を type $l_{p,q}$ の作用素 ($p = q$ のと

き type ℓ_p の作用素）という。この集合にノルム $\ell_{p,q}(T) := \| \{ \alpha_i(T) \} \|_{\ell_{p,q}}$ を入れると Banach 空間になる。

特に、X，Y が共に Hilbert 空間 H であるときは、Triebel [23] による $G_{p,q}(H, H)$ の作用素（更に $p = q$ のときは Gohberg and Krein [2] の $G_p(H, H)$ の作用素，Dunford and Schwartz [1] の class C_p の作用素）と一致する。Gohberg and Krein [2] によると，$\ell_{p,q}(H, H)$ の要素は compact 作用素で，従って次のように表現される：T は，H の二組の正規直交系 $\{e_i\}$，$\{f_i\}$ と 数列 $\{\lambda_i\} \in \ell_{p,q}$ を用いて $Tx = \sum_{1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) f_i$ ，$x \in X$ の形にかける作用素と同じで，$\| \{\lambda_i\} \|_{\ell_{p,q}} = \ell_{p,q}(T)$ となる。

また，H から H への nuclear 作用素の全体を $\mathcal{N}(H, H)$，そのノルムを $\nu(T)$，Hilbert-Schmidt 作用素の全体を $G_2(H, H)$，ノルムを $\sigma(T)$ とすると

$$\ell_1(H, H) = \mathcal{N}(H, H), \quad \ell_1(T) = \nu(T) \qquad [16],$$

$$\ell_2(H, H) = G_2(H, H) = \Pi_p(H, H), \quad 1 \leqq p < \infty$$

$$\ell_2(T) = \sigma(T) = \pi_2(T) \qquad [16], [18], [13]$$

なることが知られている。

我々は，$\ell_{p,q}$-type の作用素と $(p,q;r)$-absolutely summing operator の関係を調べるため，これら作用素の作る空間の補間空間を考える。

以下で用いる二つの Banach 空間 E，F の平均補間空間 $(E,F)_{\theta,q}$，$0 \leqq \theta \leqq 1$，$1 \leqq q \leqq \infty$，の基本的性質はよく知られている [7]，[4]，[10]。

先ず，Triebel [23] の補題は，次の形になる：

命題 7. $0 < \theta < 1$，$1/p = 1-\theta$，$1 \leqq q \leqq \infty$ とするとき，

$$(N(H,H), \ell_\infty(H,H))_{\theta,q} = \ell_{p,q}(H,H)$$

が成立する。

また，補間空間の reiteration theorem を用いて，

系 $1 < p_i,\ p < \infty$，$1 \leqq q_i,\ q < \infty$，$i = 1, 2$，$1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$，$0 < \theta < 1$ なるとき

$$(\ell_{p_1,q_1}(H,H), \ell_{p_2,q_2}(H,H))_{\theta,q} = \ell_{p,q}(H,H)$$

が成立する。

$\Pi_{p,q;r}$ に関する補間空間に対しては

定理 5. $1 \leqq p_i < \infty$，$1 \leqq q_i, q, r \leqq \infty$，$i = 1, 2$，$p_1 \neq p_2$，$1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$，$0 < \theta < 1$ とすると

$$(\Pi_{p_1,q_1;r}(X,Y), \Pi_{p_2,q_2;r}(X,Y))_{\theta,r} \subset \Pi_{p,q;r}(X,Y)$$

が成立する。ここで X, Y は Banach 空間。

これは，補間空間の定義と，

$$(l_{p_1, q_1}, l_{p_2, q_2})_{\theta, q} = l_{p, q}$$

なる関係を用いて証明出来る。

以上の結果を用いると，

定理 6、 $2 < p < \infty$， $1 \leqq q \leqq \infty$， $1 < r < 2$ に対し，$1/p_1 = 1/p + 1/r - 1/2$ とおくと

$$l_{p, q}(H, H) \subset \Pi_{p_1, q; r}(H, H)$$

が成立する。

証明は，

$$(N(H, H), l_\infty(H, H))_{1/2, 2} = l_2(H, H) = \Pi_r(H, H),$$

$1 \leq r < \infty$，なること [13]，および，定理 4 から

$$l_\infty(H, H) = \Pi_{r_1, r}(H, H), \quad 1/r = 1/2 + 1/r_1$$

なることに注意して，命題 7，その系，定理 5 を順次用いて云える。

一方，Gohberg and Krein [2] の結果によると，$\Pi_{p, q; r}$ が normed ideal なることから

補題 2. $1 \leqq p, q, r < \infty$ に対し，任意の $(p, q; r)$-absolutely summing operator は compact operator。

が成立するから，$T \in \Pi_{p, q; r}(H, H)$ を標準分解して，定義を用いて検討すると，

次の定理が得られる：

定理 7. $1 \leqq p, q \leqq \infty$, $1 \leqq r < 2$ に対して $1/p_1 = 1/p + 1/2 - 1/r \geqq 0$, $1/q_1 = 1/q + 1/2 - 1/r \geqq 0$ とすると

$$\Pi_{p,q;r}(H, H) \subset \ell_{p_1,q_1}(H, H)$$

が成り立つ。

§6. あとがき.

1) 本文の証明の詳細は [11] で発表予定。

2) 以上の議論は, absolutely summing operators と type $\ell_{p,q}$ - operators に関するものであったが, Persson and Pietsch [14] で展開されている p-nuclear operator $\in N_p$, p-quasi-nuclear operator $\in N_p^Q$, p-integral operator $\in I_p$, p-quasi-integral operator $=$ p-absolutely summing operator $\in I_p^Q = \Pi_p$ ([12], [16], [17], [20], [21]) 等についても, 同様の議論がなされる。

3) Kernel 定理 (X が nuclear 空間なら, 任意の局所凸ノルム空間 Y に対して $T \in B(X, Y)$ は nuclear 作用素。) に対応するような空間と作用素の間の議論が, 我々の作用素の議論からも展開されることが期待出来る ([6]

参照）。

4) また [21], [24], [25] 等で得られているような、Sobolev, Besov 空間等の埋蔵作用素が $(p, q; r)$-absolutely summing operator, p-nuclear operator, ---, となる場合を調べる問題も興味深い。

参考文献

[1] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear operators I, II; New York, 1958, 1963.

[2] I. C. Gohberg and M. G. Krein, Introduction of the theory of linear non self-adjoint operators, Moscow, 1965.

[3] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16, 1955.

[4] P. Grisvard, Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, J. Math. Pures et Appl. 45, 1966, 143–290.

[5] S. Kwapień, Some remarks on (p, q)-absolutely summing operators in l_p-spaces, Studia Math.

29, 1968, 327–337.

[6] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math. 29, 1968, 275–326.

[7] J. L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publ. Math. de I.H.E.S., Paris, 19, 1964, 5–68.

[8] K. Maurin, Abbildungen von Hilbert-Schmidtschen Typus und ihre Anwendungen, Math. Scand. 9, 1961, 359–371.

[9] B. Mitjagin and A. Pełczyński, Nuclear operators and approximative dimension, Proc. Inter. Cong. Math., Moscow, 1966, 366–372.

[10] K. Miyazaki, Some remarks on intermediate spaces, Bull. Kyushu Inst. Tech. 15, 1968, 1–23.

[11] ________, $(p, q; r)$-absolutely summing operators, to appear.

[12] R. Oloff, Interpolation zwischen den Klassen $\mathfrak{S}_p$ von Operatoren in Hilberträumen, Math. Nachr. 46, 1970, 209–218.

[13] A. Pełczyński, A characterization of Hilbert-

Schmidt operators, Studia Math. 28, 1967, 355–360.

[14] A. Persson und A. Pietsch, p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen, Studia Math. 33, 1969, 19 – 62.

[15] A. Pietsch, Einige neue Klassen von kompakten linearen Abbildungen, Revue Math. Pures Appl. 8, 1963, 1–21.

[16] ————, Nukleare lokalkonvexe Räume, Berlin, 1965.

[17] ————, Quasinukleare Abbildungen in normierten Räumen, Math. Ann. 165, 1966, 76 – 90.

[18] ————, Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Math. 28, 1967, 333 – 353.

[19] ————, Hilbert-Schmidt Abbildungen in Banach Räumen, Math. Nachr. 37, 1968, 237 – 245.

[20] ————, Ideale von S_p - Operatoren in Banachräumen, Studia Math. 38, 1970, 59–69.

[21] ———— und H. Triebel, Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren, Studia Math. 29, 1968, 95 – 109.

[22] P. Saphar, Applications à puissance nucléaire et applications de Hilbert-Schmidt dans les espace

de Banach, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 83, 1966, 113–151.

[23] H. Triebel, Über die Verteilung des Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev-Besov-Räumen, Inventiones Math. 4, 1967, 275–293.

[24] ________, Über die Approximationszahlen der Einbettungsoperatoren $J(B^r_{p,q}(\Omega) \to B^{r'}_{p',q'}(S))$, Arch. Math. 19, 1968, 305–312.

[25] ________, Über die Verteilung der Approximationszahlen von Integraloperatoren in Sobolev-Besov-Räumen, Jour. Math. Mech. 19, 1970, 783–796.

[26] N. Tomczak, A remark on (s,t)-absolutely summing operators in L_p-spaces, Studia Math. 35, 1970, 97–100.